# PROBLEMATIZAR LA GEOMETRÍA:

## DEL PAPEL A LA PANTALLA DIGITAL

Autoras:

Mercedes Villalba[1]

Adriana López[2]

**Resumen**

Las XO están presentes en nuestras aulas y ellas habilitan nuevas formas de trabajo que tenemos que adecuar, teniendo en cuenta las investigaciones en el campo de la didáctica, en nuestro caso, de la Matemática.

Las situaciones didácticas son objetos teóricos cuya finalidad es estudiar el conjunto de condiciones y relaciones propio de un conocimiento bien determinado.

Algunas de esas condiciones pueden variarse a voluntad del docente, y constituyen una variable didáctica cuando, según los valores que toman, modifican las estrategias de resolución y en consecuencia el conocimiento necesario para resolver la situación.

En nuestro caso tenemos en cuenta, básicamente el soporte digital y con él pasamos de una geometría estática a una geometría dinámica, de una geometría intrafigural a una geometría interfigural, de la exploración, la representación y la experimentación de pocos a multiplicidad de casos.

Esto favorece la elaboración de conjeturas y la modelización matemática.

Construir un rectángulo con lápiz, papel, regla (o escuadra o compás o semicírculo) pone en juego saberes y habilita procedimientos diferentes que las construcciones realizadas en softwares como Geogebra.

El pasaje de uno a otro soporte, produce lo que se llama "salto informacional": un cambio de valor de una variable didáctica en el interior de una situación de aprendizaje susceptible de provocar un cambio de estrategia. (Briand, 1995)

Con TortugArte pasamos de la representación y la interpretación, a la programación, pues las figuras no están predefinidas, sino que se van dibujando de acuerdo a las órdenes que le demos a la Tortuga.

Son necesarias algunas adecuaciones a los nuevos registros, sintaxis y herramientas. Se trata de una geometría muy ligada al lugar en que se encuentra la tortuga y a la orientación que adopta en cada momento. Los esquemas construidos por los alumnos, respecto a la construcción de polígonos con los materiales convencionales, no funcionan en TortugArte, lo cual hace necesario establecer

---

[1] Maestra, con formación y actuación en Matemática e Informática Educativa en el Consejo de Formación en Educación, Montevideo

2 Maestra y Profesora de Matemática en Secundaria e IINN, Montevideo

relaciones entre las figuras que llevan a la modificación de los esquemas, y con ello a un enriquecimiento de la construcción de las propiedades.

En la teoría de los Campos Conceptuales, Vergnaud explica que los conceptos se organizan en esquemas. El funcionamiento cognitivo comporta operaciones que se automatizan progresivamente y decisiones conscientes que permiten tener en cuenta valores particulares de las variables: si el esquema no resulta eficaz se cambia.

La Tortuga hace aflorar las representaciones que tienen los alumnos y hace que se materialice tal representación, una vez que la tortuga ejecuta las órdenes con las que el "programador" ha construido la representación asociada al objeto geométrico que se trata de representar.

Desde estos supuestos, hemos llevado a cabo un taller con estudiantes magisteriales, con el propósito de vivenciar los procesos propios del hacer matemático que habilita el uso de actividades de las XO, así como favorecer la metacognición, en vista a los fundamentos didácticos que habrán de aprender, como futuros enseñantes.

Queremos compartir nuestra experiencia y reflexiones con quienes apuestan, como nosotras, a la mejora de la enseñanza con tecnologías.

## Marco teórico de referencia para nuestros cursos de Formación de Maestros

Desde el paradigma de la Enseñanza para la Comprensión, H. Gardner[3] plantea que cuando una persona comprende algo -un concepto, una técnica, una teoría o un ámbito de conocimiento- lo puede emplear de forma apropiada en una nueva situación, en circunstancias poco familiares, lo cual no es posible si solo recuerda la información.

Un elemento básico en este paradigma lo constituyen los desempeños de comprensión: La concepción de la comprensión como un desempeño creativo más que como un estado mental, subraya la capacidad e inclinación a usar lo que uno sabe cuando actúa en el mundo.[4]

Respecto al uso de la tecnología, expresa Gardner: Por sí sola, no es útil ni perjudicial, no es más que un instrumento. Los ordenadores más rápidos y avanzados del mundo no nos podrán ayudar en nuestra misión si el software no sirve para mejorar la comprensión. Pero haríamos mal si pasáramos por alto las oportunidades que nos ofrecen las sofisticadas tecnologías de hoy. Son los educadores experimentados quienes deben examinar los objetivos - mediante una búsqueda

---

[3] La educación de la mente y el conocimiento de las disciplinas, Barcelona, Paidós, 2000, págs. 136-157. Traducción al español: Patricia León Agustí y María Fernanda Camacho.

[4] ¿Qué es la Enseñanza para la Comprensión? *Martha Stone Wiske*

empírica - y determinar, caso por caso, qué tecnologías y qué usos de las mismas pueden contribuir a la consecución de esos objetivos.
Esta búsqueda nos ha llevado a la selección de dos programas para iniciar nuestros cursos 2012 de Formación de Maestros, desde el estudio comprensivo de la geometría: Geogebra y TortugArte, en el entendido que brindan excelentes posibilidades para buscar caminos y soluciones alternativas a problemas matemáticos, que habilitan el registro de los correspondientes procedimientos y algoritmos, indicadores de los procesos cognitivos llevados a cabo por los estudiantes, a los cuales volver, para pensar a partir de ellos y generar nuevos saberes.

Adherimos al concepto de B. Charlot[5] que *"estudiar matemáticas es efectivamente HACERLAS, en el sentido propio del término, construirlas, fabricarlas, producirlas [...] No se trata de hacer que los alumnos reinventen las matemáticas que ya existen sino de comprometerlos en un proceso de producción matemática donde la actividad que ellos desarrollen tenga el mismo sentido que el de los matemáticos que forjaron los conceptos matemáticos nuevos.*
*Democratizar la enseñanza de la matemática supone en principio que se rompa con una concepción elitista de un mundo abstracto que existiría por sí mismo y que sólo sería accesible a algunos, y que se piense en cambio la actividad matemática como un trabajo cuyo dominio sea accesible a todos mediante el respeto de ciertas reglas. Son dichas reglas, es decir las técnicas pedagógicas, las que permiten al alumno conducir el trabajo de su pensamiento matemático.*
*[...]Si el aprendizaje de las matemáticas es actualmente difícil, no es porque las matemáticas son abstractas, sino porque este aprendizaje no está basado en la actividad intelectual del alumno sino en la memorización y aplicación de saberes de los que el alumno no ha comprendido realmente el sentido."*

Nuestros estudiantes vienen con muy diversas historias sobre su aprendizaje matemático – escolaridad, planes de estudio, edad, profesores, motivaciones- en cambio tienen de común el desconocimiento de los programas informáticos que hemos seleccionado y la muy escasa o nula experiencia con las XO para trabajar matemática. Por otra parte, por tratarse del inicio del curso, no hemos desarrollado aún ningún contenido programático, de manera que se trata de "romper" con la premisa "si la profesora enseñó X, en el problema que propone hay que aplicar X" y crear así la necesidad de buscar en los conceptos que ya tienen acerca del cuadrado y otros polígonos regulares, con la certeza de que todos tendrán herramientas para empezar a construir.

---

[5] conferencia dictada en Cannes, marzo 1986

**El taller**

Actividad 1- Programa a utilizar: Geogebra

Presentación del programa y de las herramientas básicas

Consigna de trabajo:

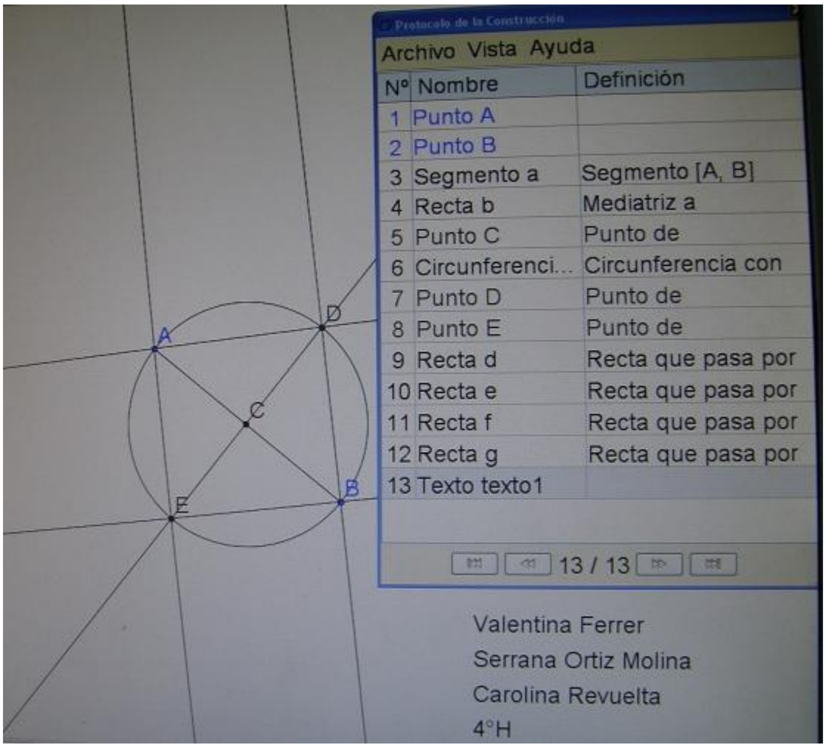
> Traza un segmento de extremos A y B.
>
> Sabiendo que [AB] es la diagonal de un cuadrado, traza dicho cuadrado.
>
> Describe los pasos seguidos para construirlo, especificando qué herramientas utilizaste y justifica dicha construcción. ¿Qué propiedades pusiste en juego?

Algunas construcciones

1- Trazan la mediatriz de [AB]

Marcan el punto C, que es la intersección del segmento con la mediatriz trazada

Trazan una circunferencia de centro C, y radio [CA].




Luego marcan los puntos de intersección de la mediatriz con la circunferencia (los puntos E y D). Así queda definido el cuadrado (AEBD).

¿Por qué trazar la mediatriz de la diagonal? Aquí se está utilizando la idea de que la mediatriz es una recta perpendicular al segmento que contiene a su punto medio. La propiedad que se pone en juego no es exclusiva del cuadrado, la comparten todos los paralelogramos: sus diagonales se cortan en su punto medio.

¿Cómo se resuelve que sea un cuadrado y no otro paralelogramo? Lo primero es que las diagonales son perpendiculares, por lo cual la figura trazada a partir de la mediatriz será un rombo. ¿Cómo lograr que sea un cuadrado?

El cuadrado tiene diagonales perpendiculares pero también iguales, se traza la circunferencia de centro C, que es el punto de corte de las diagonales. Como deben ser iguales y cortarse en su punto medio para asegurarse de que sea un cuadrado (además de que sean perpendiculares) los vértices serán puntos de la circunferencia trazada.

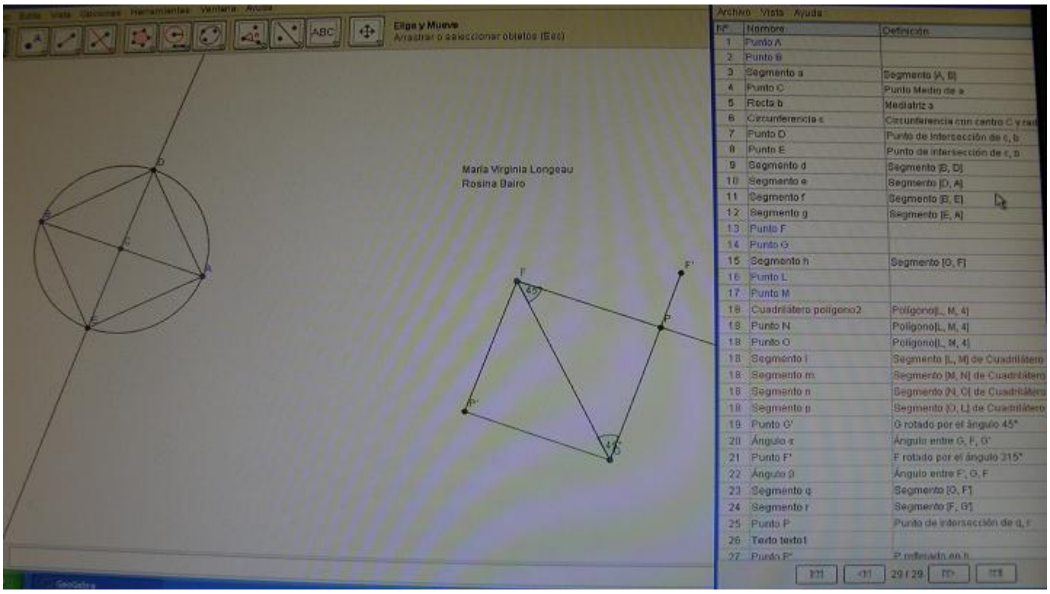
Aquí se pone en juego otra figura geométrica: la circunferencia. Recordemos que la circunferencia es el conjunto de puntos del plano que equidistan (o sea están a igual distancia) de un punto que se llama centro, en este caso el punto C.

Estas tres propiedades de las diagonales aseguran que la figura trazada es un cuadrado y no puede ser otro paralelogramo.

Es interesante ver que aquí no se ponen en juego las características más conocidas de la figura: sus cuatro lados iguales y sus cuatro ángulos rectos (que tienen relación con los algoritmos tradicionales de trazado del cuadrado).

Con respecto al uso de Geogebra, diremos que los alumnos redactaron su procedimiento y fundamentaciones sin conocer la vista del protocolo de la construcción, que solo se muestra posteriormente a efectos de la comparación con su registro: el lenguaje natural, simbólico convencional, niveles de formalidad, correspondencia entre lo descrito y lo efectivamente realizado

2- En este caso hay dos procedimientos, el primero pone en juego las mismas propiedades que el




anterior y el segundo otras. Aunque hay algunos detalles de construcción que consideraremos en otro trabajo, destacamos lo que muestran saber estas alumnas:

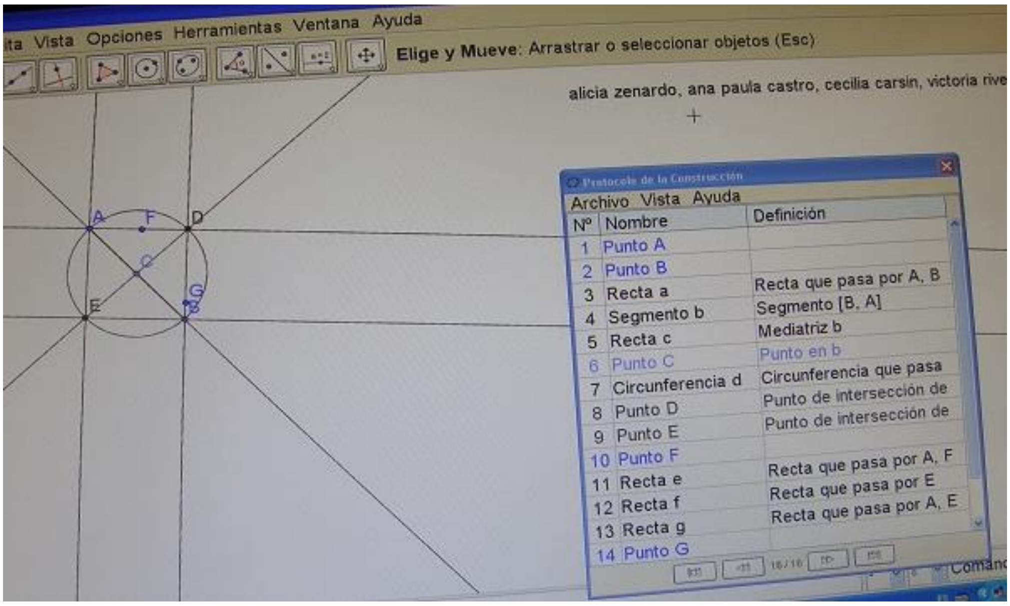
Trazan un triángulo rectángulo isósceles - cuya hipotenusa es la diagonal del cuadrado - mediante rotaciones de sus vértices de 45° y de 315° (-45) que corresponden a los ángulos que forma dicha diagonal con los catetos. El punto de intersección de los lados no comunes de dichos ángulos es un vértice del cuadrado, que se simetriza con respecto a la recta que contiene la diagonal.

En esta construcción se pone en juego la idea de que el triángulo formado por la diagonal y dos lados del cuadrado, es rectángulo e isósceles y la suma de los ángulos interiores de todo triángulo es 180°. Como todo triángulo isósceles es también isoángulo, los ángulos agudos deben medir 45°.

Estas propiedades y relaciones dan el sustento matemático para la obtención de uno de los vértices que falta al cuadrado. El otro vértice lo encuentran simetrizando dicho punto con respecto a la recta que contiene la diagonal, para lo cual deben saber que las diagonales de un cuadrado son perpendiculares y se cortan en su punto medio.

Con respecto a las ventajas de Geogebra, la exploración de las diversas herramientas que ofrece el programa, favorece ensayos de construcción  a partir de los elementos con que trabaja (rectas, ángulos, lugares geométricos (circunferencia, mediatriz, bisectriz), movimientos (simetría, rotación), medida, que movilizan relaciones entre las figuras y que pueden ser desechados o modificados sin poner en riesgo la prolijidad de la representación. Se puede apreciar que algunos elementos nombrados en el protocolo de construcción han sido ocultos.

3- En este caso se utiliza un procedimiento similar al caso 1, pero difiere en la  definición de puntos, similar al que presenta el caso 2 y que da lugar a la comprensión de un concepto muy importante en geometría: la diferencia entre un dibujo y un trazado.




Vemos que los puntos F y G que se utilizan para la construcción de las rectas donde se incluirían los lados del cuadrado, son puntos libres o sea que no cumplen ninguna condición. Es probable que se hayan ubicado “a ojo”, por ejemplo, F alineado con A y D.

También el punto C se define como un punto del segmento b, pero no el punto de intersección con su mediatriz, por lo tanto no está fijo y, al funcionar como centro de la circunferencia d, que pasa por uno de los vértices del segmento, solo pasa por el otro en un caso particular que es el que se ve en la pantalla. Si quedamos en lo perceptivo parece correcto, pero la construcción geométrica solo se valida con propiedades que incluyen la definición de los puntos. Basta mover el punto en la pantalla para poner en evidencia que lo que se construye no es un cuadrado y entonces empezar a buscar explicaciones que llevarán a la comprensión de la diferencia con un dibujo: esto es imposible de realizar utilizando  los útiles de geometría convencionales.

Este trabajo implica romper con la Geometría tradicional, que se ve en las aulas  donde, en general, se realiza un reconocimiento sensorial de las figuras estudiadas, o una constatación del tipo de figura que se presenta, mediante la  medición (con los errores inherentes al acto de medir).
En esta propuesta se espera que el alumno tenga que establecer vinculaciones  entre los distintos conceptos que se abordan en un curso para anticipar relaciones desconocidas en un proceso anticipatorio, valioso en sí mismo. Pero luego se exige  que el alumno pueda argumentar, asegurar que lo hecho es correcto. Se espera una validación utilizando propiedades de la figura en cuestión.

Actividad 2 - Programa a utilizar: TortugArte

Presentación del programa y de las herramientas básicas

1ª parte

Consigna de trabajo para realizar en dupla:

| algoritmo 1 | algoritmo 2 |
|---|---|


a) ¿Qué dibujan los algoritmos  1 y 2 respectivamente?

b) ¿Qué similitudes y diferencias encuentras en cada dibujo? ¿A qué las adjudicas?

c) ¿Qué modificarías para obtener un triángulo? ¿Y para un decágono?

d) ¿Puedes establecer una regla general para la construcción de un polígono regular cualquiera?

Después de ejecutar estos programas, los alumnos pueden llegar a reconocer “mirando” que  la figura construida con el algoritmo 1 es un hexágono regular y la construida con el algoritmo 2 es un

eneágono regular.

Para ello deben interpretar los comandos y los valores adjudicados para cada uno: por ejemplo “fordward” (adelante) produce el efecto de un segmento de longitud indicada por el valor que acompaña el comando, cuya unidad es un paso de la tortuga. Es interesante comparar las medidas convenientes de acuerdo a la figura a que se aplique y la dimensión de la pantalla.

“Right” (derecha) produce el efecto de un giro en sentido horario, cuya amplitud está indicada por el valor que acompaña al comando, cuya unidad es un grado sexagesimal. Como el ángulo completo es de 360°, se debe establecer la relación entre la cantidad de giros y el valor de los mismos si se quiere completar un giro completo, que es la manera de “cerrar” el polígono.

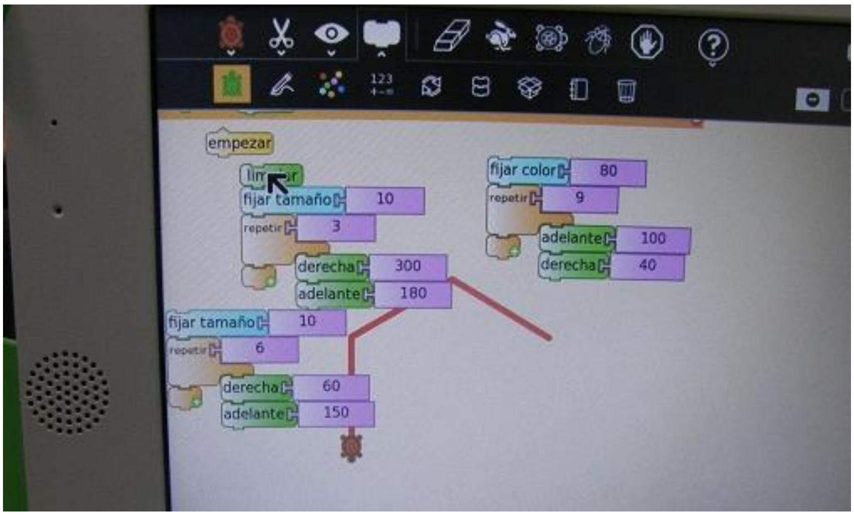
Implícitamente, el polígono está inscripto en una circunferencia, a quien pertenecen los vértices del polígono construido.

“Repeat” (repetir) produce el efecto de repetir el ciclo de comandos enlazados al mismo, la cantidad de veces indicada por el número que acompaña al comando.

Entonces, el alumno ha de concluir que la igualdad de lados y de ángulos está dada por construcción. Pero para formar el polígono es necesaria la relación 360/n (siendo n el número de lados del polígono) para determinar el ángulo de giro y repetir n veces el ciclo de comandos.

En cambio, la longitud puede tomar cualquier valor (solo es conveniente que permita ver toda la figura en la pantalla).

Resulta significativo que el ángulo de giro representa el ángulo exterior, pues se trata de dar un giro con respecto a la dirección del lado construido previamente. En cambio, en los trazados con útiles de geometría o con los softwares que los emulan (como Geogebra) suele trabajarse con los ángulos al centro (que tienen el mismo valor que el exterior, propiedad que puede también trabajarse a partir de estas constrataciones).



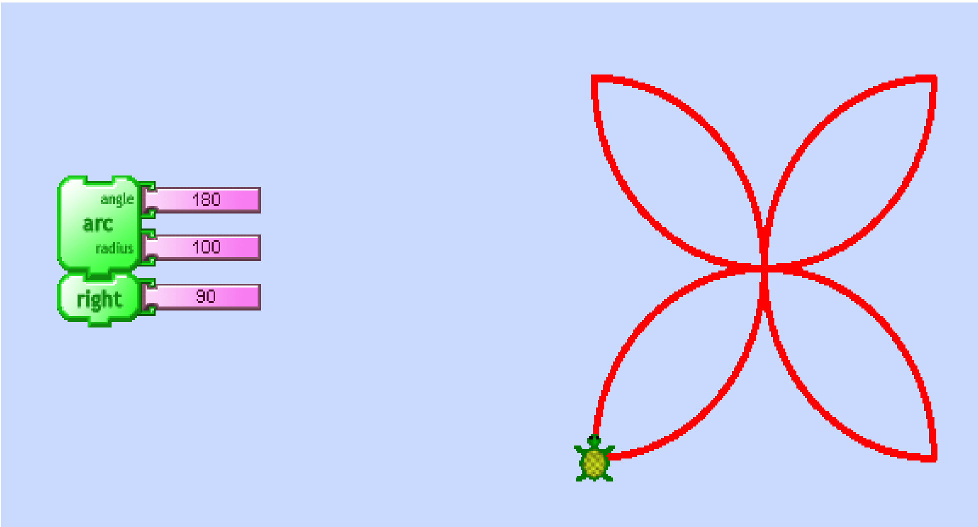

En esta pantalla, además de los algoritmos dados, se ve otro que corresponde al punto c) de la consigna, donde están intentando construir un triángulo regular, apelando a lo que Gérard Vergnaud llama “esquema”, o sea organización invariante de la conducta para una clase de situaciones dadas. Los conocimientos contenidos en los esquemas son los invariantes operatorios. En una situación abierta, buscamos en nuestros repertorios. En este caso es claro que el algoritmo básico se debe repetir 3 veces, y el esquema lo asocia a un ángulo de 60° por tratarse de un triángulo equiángulo, pero este esquema no funciona porque es el que corresponde a los trazados con útiles de geometría convencionales, donde se utilizan los ángulos interiores. Es necesario, entonces, modificar el esquema y se empieza a probar con otros valores, entre los que se trata de establecer relaciones: en la imagen se ve un giro de 300 grados hacia la derecha, que equivale a un giro de 60° a la izquierda. Pero este intento de modificar el sentido no ha dado el efecto esperado, pues los tres segmentos no “cierran” el polígono. Sin embargo, TortugArte permite tener a la vista los otros algoritmos, compararlos, correrlos, borrarlos, ver su ejecución inmediata, por pasos (lentamente) y también por bloque con la explicación del efecto que produce.

Es en este tipo de trabajos donde el alumno encuentra regularidades, reconoce patrones, logra describirlos y generalizarlos, ayuda a realizar un trabajo exploratorio, que promueve el tipo de pensamiento matemático que será el cimiento para la construcción de ideas más abstractas.

Para G. Brousseau el sentido de un conocimiento matemático se define no sólo por la colección de situaciones donde este conocimiento es realizado como teoría matemática, no sólo por la colección de situaciones donde el sujeto lo ha encontrado como medio de solución, sino también por el conjunto de concepciones que rechaza, de errores que evita, de economías que procura, de formulaciones que retoma, etc.

Es, en principio, haciendo aparecer las nociones matemáticas como herramientas para resolver problemas como se permitirá a los alumnos construir el sentido. Sólo después estas herramientas podrán ser estudiadas por sí mismas. Es lo que pretendemos promover con nuestra propuesta:

2ª parte- consigna




¿Con qué bloque y valor completas el programa para obtener la figura dibujada? ¿Por qué? ¿Dónde lo ubicas?

Copia el programa completo aquí:

¿Podrías decir que el algoritmo de construcción aplicado determina un cuadrado? ¿Por qué?

En este caso, se trata de poner en juego algunas propiedades conocidas del cuadrado para establecer nuevas relaciones intra e interfigurales.
Tal como lo plantea Brousseau, el problema es devuelto al alumno: hay una propuesta para resolver, sin caminos preestablecidos por el docente, que pide, además, la justificación de la respuesta. Evidentemente no es un ejercicio de aplicación de propiedades aprendidas mecánicamente, sino un verdadero problema en cuanto moviliza los saberes que se ponen en juego, admite diversas respuestas y niveles de formalización.
Se trata aquí de analizar qué efecto producen los dos comandos empleados, teniendo en cuenta los valores utilizados, y visualizar la regularidad que permite completar la figura. Ante una regularidad, el comando apropiado para agregar será "repetir" tantas veces como sea necesario para completar la figura. No es un cuadrado, pero se visualiza y se puede justificar la presencia de distancias iguales entre los vértices (hay que discutir si son vértices de la figura roja) la igualdad de los ángulos de rotación, las relaciones entre la medida del arco, el ángulo de giro, el valor del radio y el valor de los ángulos que determinan el cuadrado.
Tener en cuenta que el ángulo de giro es un llano, con lo cual el punto de partida y de llegada de la tortuga, en cada uno, determina un diámetro de la circunferencia (que es el lado del cuadrado). A 180° se agrega el cambio de dirección de 90°, lo cual suma 270° que equivale a un giro de -90°.

Pensemos que ahora queremos trazar la figura roja con Geogebra o con papel y útiles de geometría: ¿qué herramientas conviene utilizar? ¿Por qué? ¿Necesito algún otro punto de referencia para el trazado? Sin lugar a dudas que el problema se transforma sustancialmente, pues convencionalmente las circunferencias se trazan tomando un punto como centro, en cambio la tortuga lo hace con un giro completo a partir de un punto de la propia circunferencia. Tanto la forma operatoria (lo que se hace) como la predicativa (lo que se dice) varía según los conocimientos que se ponen en juego.
Por eso, la variable didáctica "herramientas para la construcción" (en papel, en la XO, en el entorno) es una poderosa estrategia para enseñar a "hacer geometría" pues habilita diferentes procedimientos, conocimientos, propiedades, niveles, relaciones, etc.

**La voz de los estudiantes**

La valoración del taller por parte de los estudiantes resulta positiva en cuanto los puso en contacto con un recurso tecnológico que está presente en las aulas de práctica escolar y que tienen que seguir investigando, para su apropiación como entornos alternativos de aprendizaje, en un área donde existe una práctica de enseñanza llamada *ostensión* o *presentación ostensiva* de las nociones, que identifica a todo un conjunto de procedimientos didácticos que caracteriza cierta forma de introducir las nociones a través de "definiciones".

En cuanto a las dificultades que encontraron en la solución de los problemas anteriormente analizados, en general coinciden en que tienen que ver con el desconocimiento de los programas utilizados. Geogebra resultó más cercano a sus posibilidades que TortugArte, lo cual es lógico porque el primero emula los útiles geométricos convencionales y el segundo funciona con comandos asociados a conceptos espaciales y no solo geométricos. Pero, además, no existen herramientas específicas para la construcción de figuras geométricas sino que debe programarse un algoritmo para elaborarlas. Esta característica es lo que constituye, justamente, el potencial creativo y de desarrollo de pensamiento lógico, donde la intuición va de la mano de la razón.

También los componentes afectivos del aprendizaje estuvieron presentes: la sorpresa ante las figuras que aparecen al dar inicio a los algoritmos presentados o la alegría al hacer que la Tortuga dibujara lo esperado, la rapidez y versatilidad en el uso de las herramientas de construcción de Geogebra, donde la claridad y colorido de las representaciones así como el registro automático de los protocolos de construcción, ayudaron a focalizar en las relaciones conceptuales.

## Referentes bibliográficos


Brousseau, G. Iniciación al estudio de la Teoría de Situaciones Didácticas, BsAs, Libros del Zorzal, 2007

Charlot, B. Conferencia dictada en Cannes, marzo 1986

Gardner, H. La educación de la mente y el conocimiento de las disciplinas, Barcelona, Paidós, 2000

Stone, M. ¿Qué es la Enseñanza para la Comprensión? Buenos Aires, Paidós, 1999.

Vergnaud, G.Teoría de los Campos Conceptuales

http://ipes.anep.edu.uy/documentos/curso_dir_07/modulo2/materiales/didactica/campos.pdf


---

Resumen de CV:


Mercedes Villalba: Maestra, especializada en Educación Especial, se desempeña actualmente como docente de Matemática y su Didáctica en cursos de Formación de Maestros (IINN) y docente de Informática Educativa en los cursos de Formación de Profesores (IPA). Ha participado como Formadora en los cursos de Matemática para Maestros (MECAEP, IPES), itemóloga en la Dirección de Investigación Evaluación y Estadística, de CODICEN, Coordinadora del Centro de Tecnología Educativa de Educación Primaria.

Cursó el Diploma en Educación y Desarrollo en IPES y el Diploma en Evaluación de los Aprendizajes (Universidad Católica).

Adriana López: Maestra de Escuela de Práctica y Profesora de Matemática egresada de IPA. Actualmente se desempeña como Profesora efectiva en los cursos de Matemática I y II de los IINN de Montevideo y Profesora efectiva en Educación Secundaria.

Diplomada en Evaluación de los Aprendizajes (Universidad Católica).